

### Задача А: Дом кошек

Ответ — это  $n \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64n$ . Действительно, каждая комната содержит четыре угла, или  $4 \cdot 4 = 16$  кошек, или  $16 \cdot 4 = 64$  лапы.

### Задача В: Пары гласных

Для каждой пары букв подряд проверим, что обе буквы являются гласными. Если это так, увеличим ответ на единицу.

### Задача С: Платоновы тела

Решение 1: воспользуемся теоремой Эйлера и узнаем недостающее число по одной из трёх формул:  $F = E - V + 2$ ,  $V = E - F + 2$  или  $E = F + V - 2$ .

Решение 2: выпишем все пять возможных троек чисел  $(F, V, E)$ . Это  $(4, 4, 6)$  для тетраэдра,  $(6, 8, 12)$  для куба,  $(8, 6, 12)$  для октаэдра,  $(12, 20, 30)$  для додекаэдра и  $(20, 12, 30)$  для икосаэдра. После этого найдём тройку, в которой два из трёх чисел совпадают с заданными, и просто выведем её.

### Задача D: Продукция

Перечислим несколько соображений, которые позволяют придумывать различные решения.

Рассмотрим какую-нибудь стратегию Тамары: когда и сколько построить фабрик. Пусть в этой стратегии всего строится ровно  $k$  фабрик. Тогда все эти  $k$  фабрик имеет смысл строить как можно раньше, как только предоставляется такая возможность. Ведь мы в любом случае потратим на фабрики ровно  $k \cdot p$  коробок с продукцией, а чем раньше начинает работать фабрика, тем больше продукции она произведёт.

Итак, для любого фиксированного количества фабрик  $k$  выгодно сначала строить все эти фабрики, а затем уже копить продукцию. Но это значит, что оптимальная стратегия состоит в том, чтобы выбрать такое число  $k$ , затем построить как можно

раньше  $k$  фабрик, а дальше копить продукцию. Так что самое простое решение состоит в том, чтобы перебрать возможные числа  $k$ . Увы, полностью задачу так не решить: это число в оптимальном решении может быть довольно большим.

Теперь посмотрим на стратегии под другим углом. Мы знаем, что оптимальная стратегия сначала строит фабрики как только может, а затем не строит фабрики вообще. Пусть последняя фабрика строится в конце минуты  $m$ . Значит, последняя фабрика создаст ещё  $t - m$  коробок с продукцией.

Как можно поменять решение в конце минуты  $m$ ? Если можно построить ещё одну фабрику, на это уйдёт ещё  $p$  продукции, а дополнительно она произведёт  $t - m$  продукции. Если же отменить постройку какой-нибудь фабрики, то, наоборот, освободится  $p$  продукции, но будет произведено на  $t - m$  продукции меньше. Числа  $t - m - p$  и  $p - t + m$  противоположные, хотя бы одно из них неотрицательное. А значит, можно либо построить все возможные фабрики в конце минуты  $m$ , либо не строить их в этот момент вообще, и хотя бы в одном из этих случаев решение не ухудшится. Получается, что можно найти оптимальное решение, всего лишь зафиксировав номер минуты  $m$ , в конце которой строится последняя фабрика. Минут по условию не больше 100, так что перебор  $m$  позволяет полностью решить задачу.

Наконец, внимательно посмотрев на формулы из предыдущего параграфа, можно заметить, что оптимальная стратегия — строить все возможные фабрики до минуты  $t - p$  (неважно, включительно или нет), а дальше копить продукцию. Любая построенная раньше фабрика успевает «окупиться», а любая построенная позже — не успевает.

### Задача Е: Звезда

Переберём все возможные перестановки пяти точек, и для каждой перестановки проверим, что получилась звезда. Всего перестановок  $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ . Можно сократить перебор в 5 или 10 раз, но в данной задаче это не требовалось.

Чтобы проверить, что получилась звезда, нужно для каждой пары отрезков, не являющихся соседними, проверить, что они пересекаются во внутренней точке. Пусть это нужно сделать для отрезков  $AB$  и  $CD$ . Достаточно проверить, что точки  $C$  и  $D$  лежат по разные стороны от прямой  $AB$ , а также что точки  $A$  и  $B$  лежат по разные стороны от прямой  $CD$ . Для первой из этих проверок вычислим косые произведения  $AB \wedge AC$  и  $AB \wedge AD$  и проверим, что они имеют разные знаки, то есть что их произведение меньше нуля. Вторую проверку устроим аналогично с косыми произведениями  $CD \wedge CA$  и  $CD \wedge CB$ .

Косое произведение векторов  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  (его ещё называют псевдоскалярным произведением) равно  $x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1$ . Его знак говорит о том, лежит ли второй вектор в левой или правой полуплоскости от первого. Координаты векторов вычисляются вычитанием: например,  $AB = (x_B - x_A, y_B - y_A)$ .

Другой способ решения задачи — сначала построить строго выпуклый пятиугольник, а затем взять его вершины через одну.

### Задача F: Мшистое Болото

Задача решается поиском в ширину.

Будем поддерживать очередь из клеток, в которых недавно вырос мох. Ещё для каждой клетки запомним число  $t$ : в какой день там вырос мох (если это ещё не произошло, то значение равно плюс бесконечности). Кроме того, для каждой клетки будем хранить число  $n$ : сколько из её восьми соседей уже покрыты мхом и обработаны. Для удобства реализации можно считать, что болото имеет размер  $(r + 2) \times (c + 2)$ , а по его границе расставить деревья.

Начнём с того, что положим в очередь все клетки, в которых изначально растёт мох, и отметим в соответствующих  $t$ , что это произошло в день 0. Далее, пока очередь не опустеет, будем брать из неё следующую клетку  $C$ . Посмотрим в цикле на восемь её соседних клеток. Если в такой клетке  $K$  пусто, увеличим количество её покрытых мхом соседей  $n$  на единицу. Если при этом число  $n$  стало равно двойке, а наша клетка  $C$  покрылась мхом в день  $t$  — запомним, что клетка  $K$  покрылась мхом в день  $t + 1$ , и добавим  $K$  в конец очереди.

Ответ — это максимальное значение  $t$  среди всех клеток, которые мы достали из очереди, или 0, если клеток со мхом не было вообще.

### Разработчики комплекта задач:

Иван Казменко (gassafm@gmail.com)

Наталья Гинзбург (naagin@gmail.com)